Europ. J. Combinatorics (1991) **12**, 327–329

Déterminant de Hankel Construit sur des Polynômes Liés aux Nombres de Dérangements

CHRISTIAN RADOUX

1

L'objet de cet article est de démontrer le théorème suivant. Soit

$$d_k(z)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{k!}{i!}z^{k-i}. \tag{1}$$

Alors

$$\begin{vmatrix} d_0(z) & d_1(z) & d_2(z) & \cdots & d_n(z)\\ d_1(z) & d_2(z) & d_3(z) & \cdots & d_{n+1}(z)\\ d_2(z) & d_3(z) & d_4(z) & \cdots & d_{n+2}(z)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ d_n(z) & d_{n+1}(z) & d_{n+2}(z) & \cdots & d_{2n}(z)\end{vmatrix}=\left(\prod_{k=0}^{n}k!\right)^2 z^{n(n+1)}. \tag{2}$$

Un cas particulier remarquable est donné par $z=1$. En effet, $d_k(1)$ n'est autre que le nombre d_k de dérangements, c'est-à-dire de permutations sans points fixes, d'un ensemble de k éléments.

On retrouve ainsi, une formule numérique obtenue dans [2] au moyen du développement en fraction continue de la série formelle $\sum_{n=0}^{\infty}d_nz^n$.

2

Il est bien connu [1] que

$$d_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!} \tag{3}$$

et que la fonction génératrice des d_n est

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_nx^n}{n!}=\frac{e^{-x}}{1-x}. \tag{4}$$

Posons

$$\mathscr{D}_n(G(x))=\text{dét}\left(\frac{\partial^{i+j-2}}{\partial x^{i+j-2}}G(x)\right)_{i,j=1,2,\ldots,n}. \tag{5}$$

On a

$$\mathscr{D}_n(G(x))=\frac{(\prod_{k=0}^{n-1}k!)^2e^{-nx}}{(1-x)^{(n^2)}}. \tag{6}$$

0195-6698/91/040327 + 03 $02.00/0

DÉMONSTRATION. Cette formule est correcte pour $n=1$ et $n=2$. En effet,

$$\mathscr{D}_1(G(x))=\frac{e^{-x}}{1-x}$$

$$\mathscr{D}_2(G(x))=\begin{vmatrix} e^{-x}\dfrac{1}{1-x} & e^{-x}\left(-\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{(1-x)^2}\right) \\ e^{-x}\left(-\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{(1-x)^2}\right) & e^{-x}\left(-\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{(1-x)^2}+\dfrac{2}{(1-x)^3}\right) \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire, par un calcul immédiat,

$$\mathscr{D}_2(G(x))=\frac{e^{-2x}}{(1-x)^4}.$$

Supposons la formule (6) vraie pour $n=1, 2, \ldots, m$ et calculons $\mathscr{D}_{m+1}(G(x))$ par la formule de Sylvester

$$\mathscr{D}_{m+1}(G(x))=\frac{\mathscr{D}_2(\mathscr{D}_m(G(x)))}{\mathscr{D}_{m-1}(G(x))}. \tag{7}$$

(Nous avons déjà utilisé cette technique dans [3], où l'on trouvera d'autres exemples: nombres de Bell, de Catalan, coefficients binomiaux centraux). Par l'hypothèse de récurrence,

$$\mathscr{D}_m(G(x))=\frac{(\prod_{k=0}^{m-1}k!)^2e^{-mx}}{(1-x)^{(m^2)}},$$

$$(\mathscr{D}_m(G(x)))'=\left(\prod_{k=0}^{m-1}k!\right)^2e^{-mx}\left(\frac{-m}{(1-x)^{(m^2)}}+\frac{m^2}{(1-x)^{(m^2+1)}}\right),$$

$$(\mathscr{D}_m(G(x)))''=\left(\prod_{k=0}^{m-1}k!\right)^2e^{-mx}\left(\frac{m^2}{(1-x)^{(m^2)}}-\frac{2m^3}{(1-x)^{(m^2+1)}}+\frac{m^2(m^2+1)}{(1-x)^{(m^2+2)}}\right).$$

Ainsi

$$\mathscr{D}_2(\mathscr{D}_m(G(x)))=\frac{(\prod_{k=0}^{m-1}k!)^4e^{-2mx}}{(1-x)^{(2m^2)}}\begin{vmatrix} 1 & -m+\dfrac{m^2}{1-x} \\ -m+\dfrac{m^2}{1-x} & m^2-\dfrac{2m^3}{1-x}+\dfrac{m^2(m^2+1)}{(1-x)^2} \end{vmatrix},$$

$$\mathscr{D}_2(\mathscr{D}_m(G(x)))=\frac{(\prod_{k=0}^{m-1}k!)^4e^{-2mx}}{(1-x)^{(2m^2)}}\times\frac{m^2}{(1-x)^2}=\frac{m^2(\prod_{k=0}^{m-1}k!)^4e^{-2mx}}{(1-x)^{(2m^2+2)}}.$$

La formule de Sylvester et une nouvelle utilisation de l'hypothèse de récurrence donnent finalement

$$\mathscr{D}_{m+1}(G(x))=\frac{m^2(\prod_{k=0}^{m-1}k!)^4e^{-2mx}}{(1-x)^{(2m^2+2)}}\times\frac{(1-x)^{(m-1)^2}}{(\prod_{k=0}^{m-2}k!)^2e^{-(m-1)x}},$$

$$\mathscr{D}_{m+1}(G(x))=\frac{m^2((m-1)!)^2(\prod_{k=0}^{m-1}k!)^2e^{-(m+1)x}}{(1-x)^{(m+1)^2}},$$

$$\mathscr{D}_{m+1}(G(x))=\frac{(\prod_{k=0}^{m}k!)^2e^{-(m+1)x}}{(1-x)^{(m+1)^2}},$$

c'est-à-dire (6), où n est remplacé par $m+1$.

3

Pour obtenir la formule annoncée, il reste finalement à noter que, d'après (4),

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} G(x) = \frac{1}{1-x} e^{-x} d_k\left(\frac{1}{1-x}\right), \tag{8}$$

à introduire (8) dans la définition (5), à comparer avec la formule (6), puis à poser $z = 1/(x-1)$.

References

1. L. Comtet, *Analyse Combinatoire,* Presses Universitaires de France, Paris, Collection SUP, "Le Mathématicien", 4 et 5 (2 tomes), 1970.
2. Ph. Flajolet, On congruences and continued fractions for some classical combinatorial quantities, *Discr. Math.*, **41** (1982), 145–153.
3. Ch. Radoux, Calcul effectif de certains déterminants de Hankel, *Bull. Soc. Math. Belg.*, **XXXI**, Fascicule 1, série B (1979), 49–55.

Received 24 April 1990 and accepted 17 April 1991

Christian Radoux
Université de Mons,
Faculté des Sciences, Avenue Maistriau 15,
B 7000 Mons, Belgique